Akademisk Afhandling

Om ett vidsträktare bruk af Qvadrat- och Rutetalens tabell vid Division,

hvilken

med Vidtberömda Filofiska Fakultetens tillstånd

och under Præsidium

af

Mag. CARL JOH. D$^{\underline{s}}$ HILL,

Math. Professor, R. N. O., L. K. V. A.,

för

Filosofiska Doktorsgraden

utgifves

af

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

CARL GUSTAF KALLENBERG,

Filos. Kand., af Skånska Nationen,

att offentligen försvaras

å Mathematiska Lärosalen den 12 Juni 1850.

VIII.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1850.

den andra och draga den från denna samt resten från den följande o. s. v. Alla de fråndragne siffrorne tillhöra qvoten (q).

Ex. 1. 11)1234567 $q = 112233\frac{4}{11}$.	Ex. 2. 11)369'4'26 $q = 33\,5\,84\frac{2}{11}$.

För 101 anses talen skrifna i centesimalsystemet; eller blir reglen följande:

Att dividera ett tal med **101.**

a) Om man ej vet att det går jemt upp.

1) Indela det (centis. eller) i tvåsiffrige classer (från höger).

2) Sätt första vänstra classen under den andra och subtrahera den (nemligen den 1:a från den 2:a).

3) Skrif den enligt reglen 2) erhållna resten under nästa (3:a) class, och subtrahera den från denne.

4) Fortfar på samma sätt, att subtrahera den nyss erhållna resten från följande class, ända tills man subtraherat från den sidsta. Blir då resten = 0, så går talet jemt med 101; men annars ger det samma rest, som den till slut erhållna. — 5) Om någon subtraction ej låter verkställa sig, så lånar man 1, innan den nästförutgående subtraction verkställes. 6) De undersatte talen ange qvoten.

Ex. 1.	15'	44	43	14	. . divid.
		15	29	14	. . qvot.
				0	. . rest.

NB. Här är 44—15 = 29, 43—29 = 14, &c.

Ex. 2.	35'	15'	43	63
		34	80	63
				0

NB. Här kunde man ej taga 35 från 15, ej heller 80 från 43, derföre låntes i förväg 1 af 35 och 15; så att 35'—0 = 34, '15'—34 = 114—34 = 80, '43—80 = 63.

Ex. 3.	7	63'	54'	83	rest
qvot =	7	55	98	85 : 101.	

b) När division går jemt upp, förfar såsom i *a*) eller ock såhär:

1) Indela det centesimalt.

2) Sätt sidsta (högra) classen under den nästföregående och subtrahera.

3) Sätt den enligt 2) erhållna resten under tredje classen, och subtrahera, samt sätt resten i classen nästförut, och

4) Subtrahera åter på samma sätt &c.

5) Slutligen måste man få en rest = 0

Ex. 1. 15 | 29 | 14) 15 | 14 |	Ex. 2. 35' | 15' | 43 63 34 | 80 | 63 |

Ex. 3. 15|44|43|14 divid.
15|29|14| = qvot.
(Säg 43-14 = 29, 44-29 = 15).

Ex. 5. 35|15|43|63
34|80|63|

Anm. 1. Fås icke sluteligen en rest = 0, så har man antingen felat, eller går talet ej jemt upp med 101. Så är i Ex. 5. minnet glömdt.

Ex. 4. 34|80|63 } ger slutrest 7, emedan
27|63| } talet ej går med 101.

Anm. 2. På samma sätt, allenast classification lämpas derefter (nemligen I, III, IV &c.), divideras med 11, 1001, 10001 &c; nemligen genom ensiffrig (eller vanlig decadisk), 3-siffrig, 4-siffrig &c. classering och classernes successiva subtration såsom i a) lärdes.

Ex. 1. 56789136195:11
qvot = 5162648745|0 = rest

Ex. 2. Detsamma med 1001.
56|789|136|195
|56|732|403
792 = rest.

Ex. 3. Samt med divis. = 10001.
567 8913|6195 = dividend
567 8345 = qvot
7850 = rest.

Anm. 3. Efter 1001 = 7.11.13 = 7.143 = 11.91 = 13.77, så kan man ock förvandla division med någon af dessa sex factorer i multiplikation med dess make. T. ex. 56789136195 skall divideras med 91. Då detta tal nyss erhölls

= 999.(56732403) + 792,
så blir qvoten = 11.56732403 + $\frac{792}{91}$
+ 567324036 $\frac{64}{91}$
eller = 624056441 + $\frac{64}{91}$.

c) Om man känner resten. Sätt den under sidsta (eller högra) classen och subtrahera den derifrån, samt drag den nya resten från nästa class o. s. v. Låt oss t. ex. veta, att resten blir (85), när 7|63|54|83 delas med 101, således fås qvot = 7|55|98,(85) = rest. (Säg 83-85 = 98, 54-98 = 55, 63-55 = 7). Prof: 7-7 = 0 *).

Anm. 4. Men då $\overset{+IV}{1}$. är schema för 101, så sökes resten så: 5483
+763
62|46
—|61
85 = r.

*) 7|63|54|83
— 7|55|98|(85)

På detta sätt divideras helst med 11, emedan ett ständigt lånande i förväg (enl. 5) faller nog besvärligt.

Ex. 206611570248 : 11 som ger
enligt b) qvot = 18782870022($\frac{6}{11}$); men
enligt c) först, (med förbigående af 2:a & 3a classen såsom v11), 20 + 57 + 02 + 48 $\widetilde{_{11}}$ 6 =
= rest. 206611570248
qvot = 18782870022(6 rest.

K) Dylika reglor kunna uppges för hvarje enkel divisor. — Särskilt märkes, att när man vet division skola gå jemt för sig, (såsom i general-nämnaren), så kan den med fördel börjas från höger med sidsta siffran; — särdeles när divisorns sidsta siffra är udda.

Ex. 35791 : 7 = 5113.	Ex. 924 : 7 = 132.
-2	-1
77	91
35-	-2
	7

Ex. 9594 : 41 = 234.	Ex. 9044 : 17 = 532.
-16	—3
943	901
-12	-5
82	85

L) I stället för att dividera med ett tal, t. ex. 17, kan man dividera med en dess mångfaldiga, t. ex. $102 = 6 \cdot 17$, hvarmed division går lättare för sig, och åter multiplicera qvoten med den använda factorn (6).

Ex.
$$\begin{array}{r|l} 102)90 & 44 \\ -1 & 80 \\ & +2 \\ \hline 89 & 3\bar{4} \end{array} \quad = 89 \cdot 102 - 34 = 89 \cdot 6 \cdot 17 - 2 \cdot 17 = 532 \cdot 17$$

M) Eller man kan först dividera med ett tal, hvars 2 eller 3 (eller flere) första siffror komma nära divisorns och sedermera corrigera qvoten. Om nemligen $b : a = Q$ och $b : (a + c) = q$, så är $b = a \,.\, Q = aq + c \,.\, q$ och följakteligen $Q = q + \frac{c \,.\, q}{a}$. Eller om $a + c = d$, så $\frac{b}{a} = \frac{b}{d} \cdot \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Ex. För 902)37635, Säg 9)37635, så $\frac{-2}{902} \cdot 418,167 =$

$$\begin{array}{r} -0,927 \\ \hline Q = 417,240\ \ldots \end{array}$$

N) $b : (a_0 + ia_1) = b \,.\, (a_0 - ia_1) : (a_0^2 + a_1^2)$, om $i^2 = -1$. Imaginär division äskar således qvadrattabellen.

O) Eller bildar man genom dubblering mutiplarne 2 & 4, (= förenklad "tarif") och brukar negativa siffror i qvoten.

Ex.
$$\begin{array}{r|r|l} d = & 121737) & 3337663329(\quad 3\bar{3}42\bar{3} = \\ d \,.\, 2 & 243474 & -365211 \qquad (= 27417 = q. \\ d \,.\, 4 & 486948 & +365211 \\ & & \overline{\quad 507643} \\ & & \overline{\quad 206952} \\ & & \overline{-36522\bar{9}} \\ & & \overline{\qquad\quad 0} \end{array}$$

P) När resten behöfs, kan man uppsöka den genom en tabula indicum, hvarom särskildt.

Q) Blandade Ex. Till A) 163637)585165912(Förläng med $6 \cdot 10^{-6}$.

$$1-x = 1{,}0\bar{2}2\bar{2}22)3511{,}00\bar{5}5\bar{3}2 = D(1{,}02\bar{2}2\bar{2}\bar{2} = 1+x \quad \left.\begin{matrix} \\ 3304 = x^2 \\ 6.. = x^3 \end{matrix}\right\} .D$$

$$\begin{array}{r} +70{,}220\bar{1} \\ -\ 7{,}0220\ - \\ +\ 1{,}755 \\ +\ 351 \\ +\ 14 \\ \hline \end{array}$$

(exact) qvot $= 3576{,}00 = \ldots\ 1{,}02\bar{2}514 \times D$

Till B) $d = 23279256)\ 155685007\ (6{,}687714 = q_0$

$d \cdot q_0 = 155685006{,}260784$

$d)\ 0{,}739216\ (031754\ 279432\ 33 = q_1$

$dq_1 = 0{,}739216\ 000000\ 744746\ 48$

$d)\ -\ 744746\ 48\ (\bar{3}201\bar{1} = q_2$

$744726\ 678696$

$-\ 19\ 801304$

hela qvoten $= q_0 + q_1 + q_2 =$

$0{,}6687714 \cdot 031754\ 279432\ 302011 = \frac{D}{d}$ i decimalbråk.

Till K) Division med 9,99,999 &c. göres såsom i $I)c)$, blott att subtraction företages i omvänd ordning, eller så att dividenden drages från resten och den småningom föresatta qvoten.

Ex. 1. 6653,0 $= 5987\ 7{:}9.$ | Ex. 2. $q = 40630958(5 = r$, $D = 36567862\ 7{:}9 = d$

Ex. 3. $q = 3|82|(77 = r$, $D = 3|78|\ 95{:}99$ | Ex. 4. $q = 396|074|(701 = r$, $D = 395|678|\ 627{:}999 = d.$

Probl. $\frac{1373}{401} = q$; Resol. $q = \frac{1373 - q}{400}$; 1373,
$-\ 3{,}4|23|94|01|49|62 = -q$

(dividera resten med 4,00 =) 4) $13{,}695|76|05|98|50|\ \ (q$

VII). Till potensering.

1). Om a skall upphöjas till någon potens (den n^{te}), så qvadreras först a, gör a^2, och åter qvadraten häraf (af a^2), gör $a^4 = a^{2^2}$, och ånya $(a^{2^2})^2 = a^{2^3}$, o. s. v. ända till a^{2^r}, varande $2^{r+1} > n$. Sedermera skrifves n i dyadiskt tecken, hvarigenom det kan sättas under formen $2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\nu} + 2^{\delta} + \ldots$, hvarigenom $a^n = a^{2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\nu} + 2^{\delta} + \ldots} = a^{2^{\alpha}} \cdot a^{2^{\beta}} \cdot a^{2^{\nu}} \cdot a^{2^{\delta}} \ldots$, så att det blott återstår, att med qvadrattalens tillhjelp multiplicera flera sådane genom qvadrering erhållna tal af formen a^{2^r}, hvilka ock en gång för alla kunna vara uträknade åtminstone för $a =$ ett mindre primtal, såsom:

1	2	4	8	16	32 = visare (exponenter)
2	4	16	$256 = 16^2 = 2^8$	65536	4294967296 = potenser
3	9	81	6561	43046721	1853 020188·851841
5	25	625	390625	152587890625	23283 064365 386962·890625
7	49	2401	5764801	33232930569601	1104 427674 243920 646305 [299201
11	121	14641	214358881	45949729863572161	
13	169	28561	815730721	665416609183179841	
17	289	83521	6975757441	48661191875666868481	
19	361	130321	16983563041	288441413567621167681	
23	529	279841	78310985281	6132610415680998648961	
29	841	707281	500246412961	2502464736803473487875	21
31	961	923521	852891037441		
37	1369	1874161	3512479453921		
41	1681	2825761	7984925229121		
43	1849	3418801	11688200277601		
47	2209	4879681	23811286661761		
1,01	1,0201	1,04060401	1,0828(56)70(56)...	1,172578·634823 698520 52	

Ex. 1. Begäres 2^{25}. — Svar: $25 = 11001_\beta$, d. ä. $25 = 2^4 + 2^3 + 1$, och följande $2^{25} =$
$= 2^{2^4} + 2^{2^3} + 1 = 2^{2^4} \,.\, 2^{2^2} \,.\, 2$, men $2^{2^2} = 4^2 = 16$, och $2^{2^3} = 16^2 = 256$, samt $2^{2^4} =$
$= (256)^2 = 65536$, hvarföre $2^{25} = 65536 \times 256 \times 2 = 65536 \times 512 = 33{\cdot}554432$.

Ex. 2. Begäres 3^{41}. Svar: $41 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 1$, således $3^{41} = 3^{32} \,.\, 3^8 \,.\, 3 =$
$= 1853\,020188851841 \,.\, 6561 \,.\, 3 = 36472996377170786403$.

Ex. 3. $29^7 = 29^4 \,.\, 29^2 \,.\, 29 = 29 \,.\, 841 \,.\, 707281$ eller $29^7 = 17249876309$.

2). Är talet sammansatt, så upphöjes först dess factorer, och sedan multipliceras deras potenser.

Ex. Begäres 957^5. Svar: Efter $957 = 29 \,.\, 33$, så är $957^5 = 29^5 \,.\, 33^5 = 20511149 \,.\, 391353393$ eller $= 11^5 \,.\, 87^5 = 161051{\cdot}4984209207 = 802711876996557$.

3). Om det än är ett stort primtal, så blir det, ökadt med $\pm$ 1, sammansatt, och $(a \pm 1)^n =$
$= a^n \pm na^{n-1} + n_2 a^{n-2} \pm n_3 a^{n-3} +$ &c. enligt binomialtheoremet.

4). Vid upphöjning af mycket stora tal till hög exponent måste man begagna en större Log.-tabell med nog många decimaler (t. ex. Volframs med 48.)... se vid Log. (§ ind.)

Anm. Cubering sker genom qvadrering och multiplication enligt formlen $x^3 = x^2 \,.\, x$; eller också med cub-tabeller enligt denna:

$$(at + b)^3 = a^3t^3 + \left(\frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{2} - b^3\right)t^2 + \left(\frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{2} - a^3\right)t + b^3.$$

Då nemligen $(a + b)^3 = (a + b)^2 \,.\, (a + b) = a^2 + 2ab + b^2) \, (a + b)$ eller $(a + b)^3 =$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ och likaledes $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, så blir genom addition $(a + b)^3 +$
$+ (a - b)^3 = 2 \,.\, (a^3 + 3ab^2)$ och subtration $(a + b)^3 - (a - b)^3 = 2 \,.\, (3a^2b + b^3)$, hvaraf fås $3ab^2$

och $3a^2b$ att insätta uti $(at+b)^3 = a^3t^3 + 3a^2bt^2 + 3ab^2t + b^3$ eller i $(a+bt)^3 =$ $= a^3 + 3a^2bt + 3ab^2t^2 + b^3t^3$, som derigenom blir $a^3 + t\left(\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2} - b^3\right)$ $+ t^2\left(\frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2} - a^3\right) + t^3b^3$.

Ex. Begäres $(7727,325)^3$ (enligt sednare formlen).

Sätt $a = 7727$ (och $t = 0{,}001$);			$a^3 =$	461'352'349'583,
$b = 325$			$(bt)^3 =$	0,034'328·125
	dessas cuber			
så är $a+b = 8052$	522049036608	—	$b^3t =$ —	34'328,125 —
$a-b = 7402$	405552648808	—	$a^3t^2 =$ —	461'352,349'583· —
2) cubernes s:a (+)	927601685416	$\times$	$\frac{1}{2}t^2 =$	463'800,842'708·
2) skilnad (—)	116496387800	$\times$	$\frac{t}{2} =$	58·248'193,900'

Således är $(7727,325)^3 =$ 461'410·565'897,302'453·125.

Ex. Cuben på $1234^{V}56789 =$ 1881676371789154860897069.

(Kulik uträknar p. 432 denna cub genom multiplication enligt enkla binomialformlen!)

Cor. Producten af ett qvadrattal och ett annat tal fås således genom cubtabellen, enligt formlen $a \cdot b^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{(a+b)^3+(a-b)^3}{2} - a^3\right)$.

Cor. Man kan ock genom densamma *få produkten af trenne olika tal,* enligt formlen: $a.b.c = \frac{1}{3} \cdot (\sigma^3 - (\sigma-c)^3 - (\sigma-b)^3 - (\sigma-a)^3)$, om $a+b+c = 2\sigma$.

Eller enligt denna, som strax följer af föregående Cor. (och hvarmed den föregående lätt bevises):

$$a \cdot b \cdot c = \tfrac{1}{6} \cdot ((a+b+c)^3 - (a+b)^3 - (a+c)^3 - (b+c)^3 + a^3 + b^3 + c^3),$$

eller, om $a+b+c=s$; $abc = \frac{1}{6} \cdot (s^3 - (s-c)^3 - (s-b)^3 - (s-a)^3 + a^3 + b^3 + c^3)$.

	$l =$	$\sigma - l$		Eller
Ex. 1.	$a = 10$	545	170·953875	1'000
	$b = 100$	455	—161·878625—	1·000' . . .
	$c = 1000$	—445	— 94·196375—	1'000· . . . . . .
	$s = 1110$	$\sigma = 555$	+ 88.121125	1 367·631' . . .
	$a+b = 110$		3) 3·000000	— 1·331' . . .
	$a+c = 1010$		$a \cdot b \cdot c =$ 1·000000	—1 030·301' . . .
	$b+c = 1100$			—1 331· . . . . . .
				6)6·000000(1·

		$\sigma - l$	cuber
Ex. 2.	$l = a =$ 35679	32568	— 34544051154432
	$= b =$ 45431	22816	— 11877321834496
	$= c =$ 55384	12863	— 2128270419647
	$s =$ 136494	summa	— 48549643408575—
	$\sigma =$ 68247	68247	+317870844905223+
		$3 \cdot a \cdot b \cdot c =$	269321201496648.
		$a \cdot b \cdot c =$	89773733832216.

Cor. $\frac{1}{2}((a+c)^3 + (a-c)^3) = (\frac{1}{2}a+c)^3 + (\frac{1}{2}a-c)^3 + \frac{3}{4}a^3$.